I L'ECONOMETRIE

L'économétrie est souvent décrite comme la partie de l'économie qui s'occupe de la mesure, du quantitatif. Elle applique les méthodes statistiques aux données empiriques issues de l'économie. Héritière à la fois des mathématiques, de l'économie et des statistiques, elle se fonde sur des modèles économiques qu'elle vient confronter à un ensemble de données observées (données de panel, série temporelle, etc.). L'économétrie vise à estimer les paramètres de ces modèles et à en vérifier la validité.

1. **Le modèle**
   C'est la formalisation d'idées ou de théories sur les mécanismes économiques. Il revient à la théorie économique de spécifier le modèle, d'en sélectionner les variables pertinentes, et d'établir, à priori, une distinction entre les variables, suivant leur rôle dans l'explication des faits. L'ensemble des variables et le système de relations qui les lient (équations, inéquations) constituent le modèle.

2. **Les variables**
   ‹ La loi psychologique fondamentale....c'est qu'en moyenne et la plupart du temps les hommes tendent à accroître leur consommation à mesure que leur revenu croît, mais non d'une quantité aussi grande que l'accroissement du revenu ››

   John Maynard Keynes économiste britannique (1883-1946).

   Le comportement du consommateur a été très tôt un sujet de prédilection pour l'écionométrie (enquêtes de satisfaction, etc.). Prenons pour exemple la fonction de consommation :

   Considérons par exemple la fonction de consommation des ménages liant le revenu et la consommation, sous l'hypothèse d'une liaison linéaire entre la consommation C et le revenu R, on peut écrire : $C = aR + b$.

   La consommation C, est dite variable **endogène** (ou dépendante, ou à expliquer), en ce sens qu'elle est "interne " au modèle.

   Le revenu R est dit variable **exogène** (ou indépendante, ou explicative), c'est une variable extérieure au modèle, qui est observée.

   On peut aussi affiner le modèle en introduisant une troisième variable, par exemple X, le niveau de liquidités avec le modèle : $C = \beta_0 + \beta_1 R + \beta_2 X$, avec deux variables explicatives, plus généralement, le modèle de régression multiple prenant en compte un nombre n de variables explicatives..

3. **Les paramètres**
   La fonction f choisie pour représenter le modèle comporte en général des paramètres inconnus, qu'il faudra estimer à l'aide de diverses méthodes de la statistique : par exemple à l'aide d'un échantillon et de la statistique inférentielle (droite de régression et méthodes des moindres carrés ordinaires), par l'utilisation des informations du passé et du présent dans le cas des séries chronologiques, etc.
   Dans l'exemple de la consommation, le modèle $C = aR + b$ présente deux paramètres à estimer, a et b ; leurs estimateurs seront notés $\widehat{a}$ et $\widehat{b}$ et un estimateur de C sera alors : $\widehat{C} = \widehat{a}R + \widehat{b}$ et le modèle $C = \beta_0 + \beta_1 R + \beta_2 X$ donnera pour estimateur : $\widehat{C} = \widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1} R + \widehat{\beta_2} X$.

4. Les différents types de modèle
   a. Modèle statique ou dynamique

      Le modèle présenté sur la consommation est un modèle statique au sens où il fait les différentes variables au même instant. Dans un modèle dynamique le temps, t, joue un rôle explicite et on étudie l'enchaînement temporel des différentes variables ; exemple : modèle prévisionnel des ventes pour la semaine t : $Y_t = \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 \widehat{Y_{t-1}}$

   b. Modèles **déterministes ou stochastiques**

      Nous avons vu que la théorie qui explique la consommation par le revenu n'est qu'approchée ; on peut évidemment trouver dans un échantillon d'une population des familles ayant le même revenu et des consommations différentes ; en fait on peut mesurer pour chaque couple la différence entre la valeur observée de la consommation et la valeur estimée par le modèle ; cette différence est notée $e_i = c_i - \widehat{c_i}$ et est appelée erreur ou résidu. On adoptera alors comme écriture du modèle : $C = aR + b + e$, e désignant une variable appelée résidu et qui rassemble les variables autres que le revenu, qui expliquent la consommation. Si l'on assimile l'écart e à une variable aléatoire, le modèle devient un modèle aléatoire et les paramètres seront alors estimés en utilisant la théorie de l'estimation statistique.

   c. **Linéaire, vous avez dit linéaire ?**

      L'adoption de schémas linéaires pour représenter la liaison entre variables économiques peut apparaître comme une simplification éloignée de la réalité. L'expérience nous montre que cette hypothèse est très souvent raisonnable ; par ailleurs la simplicité des calculs auquels conduit l'hypothèse linéaire est souvent déterminante dans son choix. Enfin la notion de linéarité doit être précisée ; quand on parle de modèle linéaire en économétrie, on évoque la linéarité par rapport aux paramètres que l'on doit estimer. Au regard de cette remarque, un modèle du type : $C = aR^{0.8} + b$ est linéaire, il suffit de poser $R' = R^{0.8}$, pour obtenir : $C = aR' + b$. Le modèle est donc linéaire si ses paramètres apparaissent dans les équations à la puissance 1 ; à contrario, le modèle $C = a^2 R + b$ n'est pas linéaire.

      Enfin, n'oublions pas que de nombreux modèles non linéaires par rapport aux variables peuvent être linéarisés : $Y = Ae^{BX}$ donne par passage au logarithme népérien : $\ln(Y) = \ln A + BX$ soit en posant $Z = \ln(Y)$, $Z = a + bX$.

II RAPPEL DE PROBABILITES 1: LOIS DISCRETES

1. Discret ou continu...
   Comme en statistique, nous serons amenés en probabilité à distinguer les distributions discrètes et les distributions continues.

Une variable aléatoire discrète est une variable qui prend des valeurs isolées, c'est à dire dont l'ensemble des valeurs est un ensemble fini ou dénombrable. Un ensemble est dit dénombrable si l'on peut compter ou numéroter ses éléments.

Une variable continue, peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle de R. Ainsi par exemple la taille d'un individu, peut prendre une infinité de valeurs non dénombrables, par exemple les valeurs (en cm) de l'intervalle $[150; 200]$.

2. **Espérance,Variance et Ecart-type d'une variable aléatoire discrète**

a. Définitions

On rappelle que :

$E(X) = \sum p_i x_i$, que $E\left(X^2\right) = \sum p_i x_i^2$ et que la variance est définie par : $V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right] = E\left(X^2\right) - [E(X)]^2$.(MC-CM : moyenne des carrés moins carré de la moyenne) et que $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

On rappelle également qu'une variable aléatoire est dite centrée si son espérance est nulle (jeu équitable).

b. Exemple : l'espérance de vie

On considère un individu de 105 ans et l'extrait de la table de mortalité :

Calculer son espérance de vie (appelée espérance de vie abrégée), à l'aide de l'extrait de la table TH-00-02 fourni ci dessous, où $l(x)$ désigne le nombre de survivants à l'âge x.

x	l(x)
102	244
103	139
104	75
105	39
106	19
107	9
108	4
109	2
110	1

c. **L'espérance est linéaire**

$$\boxed{E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$$

$$\boxed{E(aX) = aE(X)}$$

On en conclut que l'espérance est linéaire, ce qui signifie : si X et Y désignent deux variables aléatoires, on a : $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ quels que soient les réels a et b.On utilise souvent notamment : $E(aX + b) = aE(X) + b$

d. **Variables simultanées, distributions conditionnelles, marginales.**

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, on définit la loi conjointe par : $P(x, y) = P((X = x) \cap (Y = y))$ et on définit les loi marginales de X et Y par : $P_X(x) = P(X = x)$ et $P_Y(y) = P(Y = y)$.

Exemple : on considère une population d'ordinateurs et les deux variables aléatoires X et Y définies ainsi : X est une variable de bernoulli de paramètree 0.50 définie par $\begin{cases} X = 1 \text{ si l'ordinateur est neuf} \\ X = 0 \text{ si l'ordinateur est vieux} \end{cases}$ et Y désigne le nombre de pannes sur une année suivant la distribution jointe suivante :

Y / X	0	1	2	3	4
0	0.35	0.065	0.05	0.025	0.01
1	0.45	0.035	0.01	0.005	0

Donner $P(Y = 2)$, $P(X = 1)$, $P(1, 2)$; on définit la distribution conditionnelle de X sachant Y : $P(X = 1/Y = 2) = P(1, 2)/P(Y = 2) = \dfrac{0.01}{0.06} \simeq 0.166\,7$, la probabilité conditionnelle de Y sachant X et les distributions marginales de X et Y.

e. **Espérance contitionnelle**

On définit l'espérance conditionnelle de Y sous la condition $X = x$ par : $E(Y/X = x) = \sum y_i P(Y = y_i/X = x)$.

Exemple, calculons sur l'exemple précédent, $E(Y/X = 1)$ et $E(Y/X = 0)$. $E(Y/X = 1) = 0 + 1P(Y = 1/X = 1) + 2P(Y = 2/X = 1) + 3P(Y = 3/X = 1) + 0 = 0.035/0.50 + 2 * 0.01/0.50 + 3 * 0.005/0.50 = 0.14$; de même $E(Y/X = 0) = 0 + 1P(Y = 1/X = 0) + 2P(Y = 2/X = 0) + 3P(Y = 3/X = 0) + 4P(Y = 4/X = 0) = 0.065/0.50 + 2 * 0.05/0.50 + 3 * 0.025/0.50 + 4 * 0.01/0.5 = 0.56$

Loi des espérances itérées : $\boxed{E(Y) = E(E(Y/X))}$;

Exemple : $E(E(Y/X)) = P(X = 0) * E(Y/X = 0) + P(X = 1) * E(Y/X = 1) = 0.50 * 0.56 + 0.50 * 0.14 = 0.35 = E(Y)$

f. **Indépendance**

Intuitivement, deux variables aléatoires sont indépendantes si la valeur de l'une d'entre elles n'influe pas sur la distribution de l'autre.

i. Cas discret
X et Y sont indépendantes si et seulement si : $P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i) * P(Y = y_j)$

ii. Cas continu
X et Y sont indépendantes si et seulement si la fonction de répartition du couple, F est donnée par : $F(x, y) = F_X(x) * F_Y(y)$ soit : $P((X \leq x) \cap (Y \leq y)) = P(X \leq x) * P(Y \leq y)$

g. **Variance, Covariance et Corrélation**

i. On a les propriétés : $\boxed{V(aX + b) = a^2 V(X)}$
$\boxed{\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)}$

ii. **Covariance d'un couple de variables aléatoires**

On définit : $\boxed{Cov(X\ ;\ Y) = E(XY) - E(X) * E(Y) = E[(X - E(X)) * (Y - E(Y))]}$; $Cov(X\ ;\ Y)$ souvent notée σ_{xy}.

On note que la covariance est de signe quelconque et qu'elle représente : "la moyenne du produit moins le produit des moyennes"

$Cov(X\ ;\ Y) = Cov(Y\ ;\ X)$ et $Cov(aX\ ;\ Y) = aCov(X\ ;\ Y)$

$Cov(X\ ;\ X) = V(X)$

On rappelle que si X et Y sont **indépendantes**, alors $Cov(X\ ;\ Y) = 0$; mais que la réciproque est fausse...

iii. **Variance et addition**

$$\boxed{V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X\ ;\ Y)}$$

On note que la variance est en général non additive

iv. **Cas de variables indépendantes**

On retient que dans le cas particulier important de **variables aléatoires indépendantes**, on a : $\boxed{V(X + Y) = V(X) + V(Y)}$

v. **Corrélation**

La corrélation entre deux variables aléatoires est définie par le coefficient de corrélation linéaire : $\rho(X, Y) = \dfrac{Cov(X\ ;\ Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

On démontre que : $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

Ce coefficient mesure le degré de liaison linéaire entre X et Y. Un signe positif indique que X et Y varient dans le même sens et un signe négatif que les deux variables varient en sens contraire. Si $\rho(X, Y) = 0$, X et Y sont non corrélées ; c'est notamment le cas quand elles sont indépendantes.

vi. Exercice (reprendre l'exemple du paragraphe d)

Donner la loi de probabilité de Y, son espérance et sa variance.

Donner la loi de probabilité, l'espérance conditionnelle et la variance conditionnelle de Y sachant $X = 0$.

Calculer la covariance et la corrélation entre X et Y.

3. **La loi uniforme discrète**

"Le hasard est égal" disait Blaise Pascal.

On considère une expérience aléatoire et X une variable aléatoire liée à cette expérience et pouvant prendre n valeurs, $\{\omega_1; \omega_2; ...; \omega_n\}$ de façons équiprobables, alors on a : $P(X = \omega_i) = \dfrac{1}{n}$.

Exemple classique : X résultat du jet d'un dé non truqué : Valeurs de X :Univers image $X(\Omega) = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et $P(X = \omega_i) = \dfrac{1}{6}$.

L'espérance de X est : $E(X) = \sum p_i x_i = \dfrac{\sum x_i}{n}$ et $V(X) = \dfrac{\sum x_i^2}{n} - \left(\dfrac{\sum x_i}{n}\right)^2$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

4. **La loi binomiale : "To be or not to be"**

a. Loi de Bernoulli

On appelle épreuve de Bernoulli, une expérience aléatoire admettant deux résultats possibles que l'on pourra noter S (succès) et $E = \overline{S}$ (échec).

On note p la probabilité du succès et $q = 1 - p$ la probabilité de l' échec.

$p = P(S)$ et $q = P\left(\overline{S}\right)$; p est appelé le paramètre de l'épreuve. Si l'on note X la variable aléatoire prenant pour valeur, 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec, on dit que X est une variable de Bernoulli et qu'elle suit

la loi de Bernoulli de paramètre p, notée $B(1;p)$ et définie donc par :

$$\begin{cases} P(X=1)=p \\ P(X=0)=1-p=q \end{cases}$$

$$\boxed{E(X)=p \text{ et } V(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2=p-p^2=p(1-p)=p*q}$$

b. Schéma de Bernoulli

Jacobi Bernoulli (1654-1705) est un des huit mathématiciens que donna la famille Bernoulli, sur trois générations, de 1650 à 1800; son célèbre ouvrage de probabilité " Ars conjectandi" fut publié en 1713 , quelques années après sa mort.

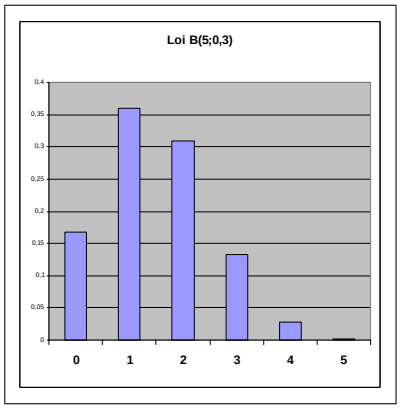
On appelle **schéma de Bernoulli,** une suite de n épreuves de Bernoulli, **identiques et indépendantes ;** on note X le nombre de succès, à l'issue des n "parties". L'univers image est : $X(\Omega)=\{0;1;2;...;n\}$;

On a pour k entier naturel variant de 0 à n :

$$\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}}$$

On dit que X **suit la loi binomiale** $B(n;p)$. On retrouve ici la patte du "Lion", Isaac Newton :

$(p+q)^n=\sum_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k}=1$, qui donne $\sum_{k=0}^{k=n}P(X=k)=1$ (probabilité de l'univers).



x_i	$P(X=x_i)$
0	0.16807
1	0,36015
2	0,3087
3	0,1323
4	0,02835
5	0,00243

Loi B(5;0,3)

x_i	$P(X\leq x_i)$
0	0.16807
1	0.52822
2	0,83692
3	0,96922
4	0,99757
5	1

Fonction de répartition

Rappel : On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire, la fonction F définie de R dans $[0;1]$, par :

$$F(x)=P(X\leq x)$$

Cette fonction de répartition est à rapprocher des effectifs cumulés croissants en statistique ; dans Excel, si on utilise l'assistant fonction f_x , dans la catégorie statistique, on dispose de la fonction LOI.BINOMIALE, dont le dernier argument est un booléen : "Cumulative" ; la réponse FAUX calculera $P(X=k)$ (non cumulative) et la réponse VRAI, $P(X\leq k)$, autrement dit ajoutera les probabilités : $P(X=0)+P(X=1)+....+P(X=k)$.

c. Loi binomiale (loi discrète)

Rappel : $\boxed{E(X)=np \text{ et } V(X)=npq}$

5. **La loi de Poisson**

La loi de Poisson doit son nom au mathématicien, probabiliste et physicien français Siméon-Denis Poisson (1781-1840).Cette loi fut proposée par Poisson, élève de laplace, dans un ouvrage publié en 1837, sous le titre : "Recherches sur la probabilité de jugements en matière criminelle et en matière civile".

La loi de Poisson est appelée la loi des événements rares ; elle s'avère particulièrement utile pour décrire le comportement d'événements dont les chances de réalisation sont faibles. Elle a de nombreuses applications dans des domaines très variés : gestion industrielle (nombre d'accidents du travail, contrôle d'acceptation..), recherche opérationnelle (étude des files d'attente , nombre d'appels reçus à un standard téléphonique), circulation routière (nombre de véhicules se présentant à un poste de péage), démographie (naissances multiples), physique (désintégration de particules), recherche médicale,....

Elle constitue également, sous certaines conditions une très bonne approximation de la loi binomiale.

Une variable aléatoire X, qui peut prendre comme valeur tout nombre entier naturel (positif ou nul), avec les probabilités :

$$\boxed{P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k\in N,\ \lambda>0}$$

est dite distribuée selon une loi de Poisson de paramètre λ, où $e\simeq 2.718$.

Comme une variable binomiale, une variable de Poisson est une variable discrète , mais elle peut prendre une infinité de valeurs, alors qu'une variable binomiale, ($\mathcal{B}(n;p)$), ne prend que $(n+1)$ valeurs : $0,1,...,n$.

Une loi de Poisson ne dépend que d'un seul nombre, λ, appelé son paramètre ; on la notera $P(\lambda)$.

Loi de Poisson	$P(\lambda)$
$E(X)$	λ
$V(X)$	λ
$\sigma(X)$	$\sqrt{\lambda}$

III RAPPEL 2 : LOIS CONTINUES

Une variable aléatoire continue peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle réel, on retrouve en probabilité la même distinction qui existe en statistique entre les caractères discrets (exemple: nombre d'enfants, qui prend des valeurs isolées) et les caractères continus (taille d'un individu qui prennet toutes les valeurs d'un intervalle).

Une loi de probabilité continue sera représentée par la représentation graphique de sa densité de probabilité ; cette densité de probabilité est une fonction qui doit posséder certaines propriétés, elle doit notamment être positive ou nulle, et l'aire située entre la courbe et l'axe des x représentant la probabilité de l'univers doit être égal à 1. ($Pour\ amateurs\ :\ cette\ aire\ est\ donne\ par\ :\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$).

En fait l'instrument de travail privilégié pour ces lois est la **fonction de répartition**, qui correspond à la notion de fréquences cumulées croissantes, cette fonction étant définie par : $F(a) = P(X \leq a)$ ($Pour\ amateurs\ :\ \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$) et qui représente l'aire située entre la courbe et l'axe des x, à gauche de la droite $x = a$.

1. **La loi uniforme**
   a. Une variable aléatoire suit la loi uniforme sur $[a;b]$ si sa **densité de probabilité** est une fonction constante sur $[a;b]$ et nulle ailleurs, c'est à dire :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a;b] \\ f(x) = 0 \text{ si } x \in]-\infty;a[\cup]b;+\infty[\end{cases}$$

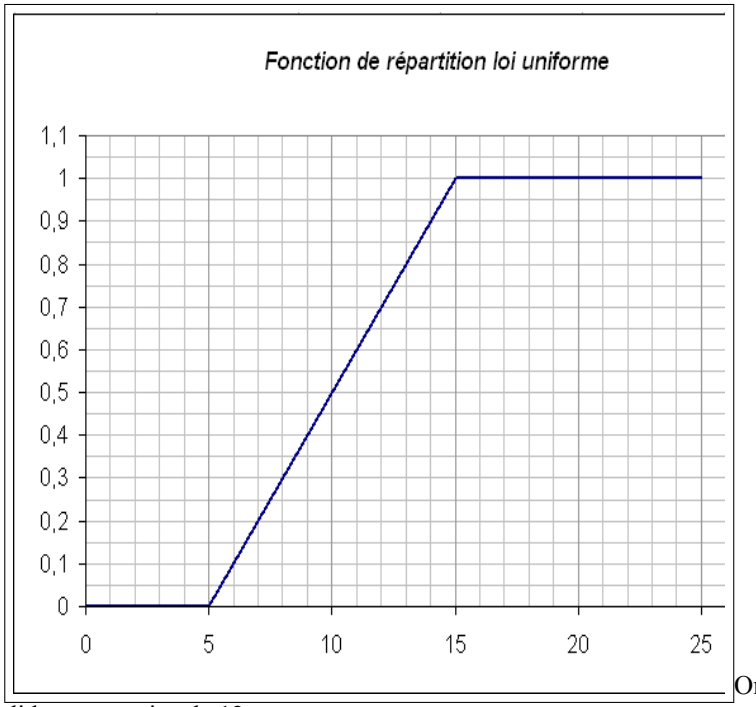
   On se retrouve dans un cas semblable à celui d'une classe d'une distribution statistique d'un caractère quantitatif continu, qui est représentée dans l'histogramme par un rectangle.

   b. Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leq x)$ ce qui représente (si $x \in [a;b]$), l'aire du rectangle de base $(x-a)$ et de hauteur $\dfrac{1}{b-a}$.

$$\begin{cases} F(x) = 0 \text{ si } x \in]-\infty;a[\\ F(x) = \frac{x-a}{b-a} \text{ si } x \in [a;b] \\ F(x) = 1 \text{ si } x \in]b;+\infty[\end{cases}$$

   ($Pour\ amateurs\ :\ \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{a}^{x} f(t)\,dt = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}dt = \frac{x-a}{b-a}$ si $x \in [a;b]$)

   On a repris ci-dessous l'exemple 1 des notes, correspondant à une loi uniforme sur $[5\ ;15]$.



On peut y lire directement, par exemple, que 70% des candidats ont moins de 12.

Mode d'emploi : $\boxed{P(c \leq X \leq d) = F(d) - F(c)}$; on lit sur le graphique que $P(7 \leq X \leq 12) = F(12) - F(7) = 0,70 - 0,20 = 0,50$, donc 50% des candidats ont une note comprise entre 7 et 12.

c. Espérance : $E(x) = \boxed{\frac{a+b}{2}}$, ce qui est conforme à l'intuition (sur notre exemple : moyenne de 10).

$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt = \int_a^b t * \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b t dt = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a} * \frac{b^2-a^2}{2}$)

d. Variance : $V(x) = E\left(x^2\right) - E(x)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^3}{3}\right]_a^b - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{(b-a)^2}{12}}$.

e. Exercice : Le métro : entre la station Concorde et la station St Georges, on suppose que le temps requis en minutes est distribué uniformément sur l'intervalle $[8; 12]$

Expliciter la loi de probabilité de la variable X représentant le temps nécessaire pour parcourir le trajet entre ces deux stations, en donnant sa densité et sa fonction de répartition. Précisez l'espérance de cette loi.

Calculer la probabilité que la rame de métro effectue le trajet en moins de 9 mn 30 secondes.

Calculer la probabilité que la durée du trajet se trouve à moins d'un écart-type de la durée moyenne.

2. **La loi exponentielle**

a. On utilise la distribution de Poisson pour décrire des événements rares, et notamment pour calculer la probabilité d'avoir x clients qui entrent dans une boutique durant un intervalle de temps donné. On peut se poser la question de savoir quel intervalle de temps s'écoule entre deux clients ; ce problème est résolu grâce à la loi exponentielle, avec comme moyenne $\alpha = \frac{1}{\lambda}$, λ étant le paramètre de la loi de Poisson ; en clair, s'il y a 12 clients par heure, et que le nombre de clients par mn est régi par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}$,le temps qui s'écoule entre deux clients suit une loi exponentielle de paramètre λ et d'espérance $\alpha = \frac{1}{\lambda} = 5$ (1 client toutes les 5 mn).

b. La loi exponentielle de paramètre λ $(\lambda > 0)$ est une loi continue de densité :

$$\boxed{\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x < 0 \\ f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}}$$

c. Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$

$$\boxed{\begin{cases} F(x) = 0 \text{ si } x < 0 \\ F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}}$$

d. Espérance et variance : $\boxed{\begin{cases} E(X) = \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \\ V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \end{cases}}$ (résultat admis . pour amateurs, faire une IPP)

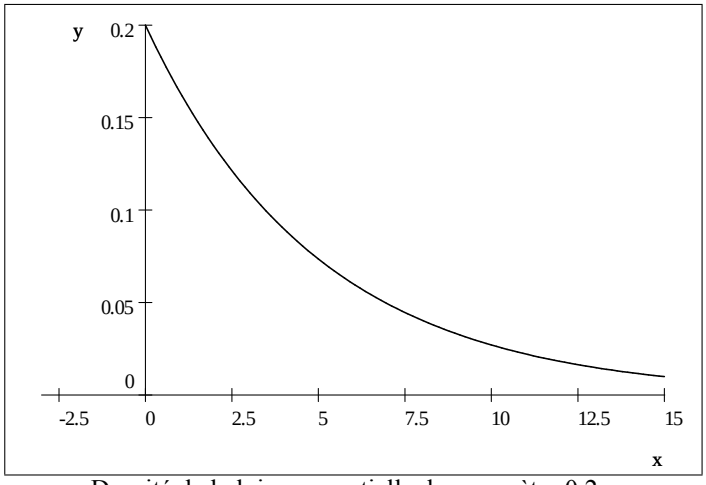
e. Exemple : si l'on reprend l'exemple introductif, la probabilité pour que le temps écoulé entre deux clients soit compris entre 2 et 3 mn est : $P(2 \leq X \leq 3) = \int_2^3 \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}t} dt = -e^{-\frac{3}{5}} + e^{-\frac{2}{5}} = 0.121\,5$ soit 12.15%.

f. **La loi exponentielle est sans mémoire**

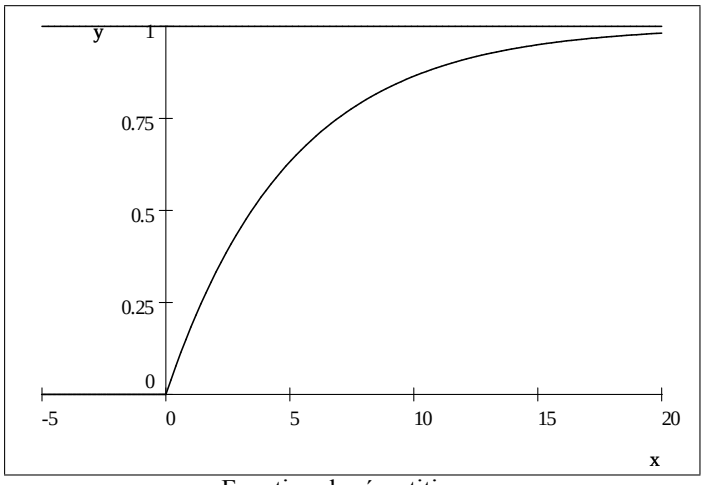
Supposons que la durée de vie d'une ampoule est distribuée suivant une loi exponentielle de paramètre α et supposons que l'ampoule fonctionne depuis t_0 heures ; quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore t heures ?En clair, si X désigne la durée de vie de l'ampoule on veut calculer : $P(X \geq t + t_0 / X \geq t_0)$; effectuer ce calcul et démontrer que le résultat est $e^{-\frac{x}{\alpha}}$, c'est-à dire : $P(X \geq t)$; autrement dit la distribution de la durée de vie additionnelle est la même que celle de la mise en service : elle ne se souvient pas de son passé.

g. Représentations graphiques : densité et fonction de répartition

Exemple : $X \rightsquigarrow Exp(0.2)$



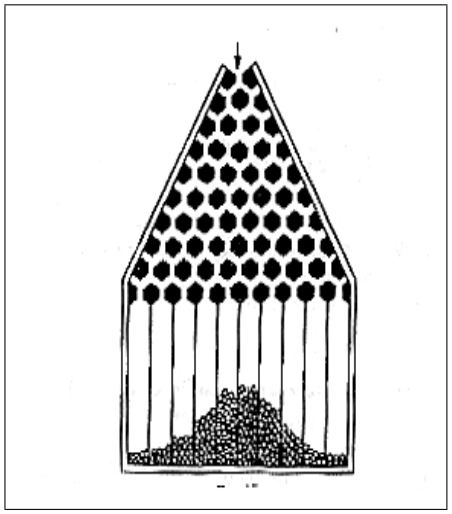
Densité de la loi exponentielle de paramètre 0.2



Fonction de répartition

IV LA REINE DES LOIS : la loi de Laplace-Gauss :$\mathcal{N}(m;\sigma)$

IV.1 Introduction


Le triangle de Galton (1822-1911)

1. **La loi normale est caractérisée par ses deux paramètres :** m **et** σ, **sa moyenne et son écart-type et est notée** $N(m;\sigma)$ **;** comme pour toutes les lois continues, notre outil de travail sera sa **Fonction de répartition,** mais nous allons voir que cette fonction de répartition est tabulée (table numérique annexée au présent polycopié).

2. **La loi normale centrée réduite** (standard)
   Il existe un modèle de référence incontournable, la loi normale centrée réduite, notée $N(0;1)$ de moyenne 0 et d'écart-type 1. La fonction de répartition de la loi $N(0;1)$ sera notée F et ses valeurs seront lues dans la table citée ci dessus. Pour tous les calculs, nous devrons nous ramener à la loi normale centrée réduite : On verra plus loin que : si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m;\sigma)$,alors $Z = \dfrac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$.

3. **Historique**

F.Galton a inventé un dispositif ingénieux représenté ci-dessus pour simuler la tendance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ (représentée par un diagramme à bâtons),quand p est proche de 0.5, vers la loi normale (courbe de Gauss, dite courbe "en cloche") . F.Galton, inventa cette machine : les billes envoyées en nombre important, ont en arrivant sur chaque clou, une chance sur deux d'aller à gauche et une chance sur deux d'aller à droite ; on retrouve un schéma de Bernoulli classique (To be or not to be") ; ce qui est fascinant, c'est la répartition des billes à la sortie suivant une distribution normale, bien identifiable par la belle courbe en cloche.

C'est au 17ème et 18ème siècle, à 50 ans d'intervalle, que d'abord Abraham de Moivre, puis le marquis Simon de Laplace, introduisirent la reine des lois continues, la loi normale, encore appelée loi de Laplace-Gauss. Comme l'ont noté de nombreux auteurs, malgré la grande précocité de Gauss, il est peu probable qu'il ait contribué à cette découverte à l'âge de trois ans, mais cette loi a souvent été attribuée à Gauss, car il a prouvé en 1821 que le résultat de De Moivre et de Laplace n'était qu'un cas particulier démontrant ainsi le caractère universelle de laloi normale.

L'apport de De Moivre est fondamental en probabilités ; son ouvrage, Doctrine of chance, paru en 1718, est la plus importante publication dans ce domaine après les travaux de Pascal et Fermat, vers 1650 . De Moivre est le premier à s'intéresser à la convergence

des variables aléatoires, en posant la problématique suivante : dans quelle mesure peut-on être sûr que lorsque l'on lance un grand nombre de fois un dé, la fréquence observée d'apparition du nombre "six" tend vers la probabilité théorique, $\frac{1}{6}$; comment évaluer simplement la probabilité d'obtenir au cours de 1000 lancers de pièce, un nombre de pile compris entre 495 et 510 ? C'est une question essentielle à résoudre pour les problèmes de modélisation .De Moivre montre en particulier que la loi binomiale tend, en un certain sens, vers la loi normale , la fameuse loi "à la courbe en cloche" (cf planche de Galton).

De Moivre s'intéresse aussi aux applications pratiques des probabilités et statistiques. Il dresse ainsi des tables de mortalité précises, et donne des formules qui permettent de calculer équitablement le montant d'une rente viagère .

Une jolie légende entoure la mort de De Moivre, survenue le 27 novembre 1754 à Londres, dans la pauvreté. On raconte que De Moivre s'était rendu compte qu'il dormait chaque nuit 1/4 d'heure supplémentaire. S'aidant de cette suite arithmétique, il avait deviné le jour de sa mort, celui où il dormirait pendant 24 heures! Il ne s'était pas trompé!

Pourquoi l'appelle-t-on loi normale? De nombreux caractères quantitatifs du monde réel suivent une loi normale : les tailles des individus, les poids, la pression sanguine, les notes à un examen, la durée de vie de certains composants, etc....Cette loi doit en grande partie son importance au **théorème central limite** qui nous dit en gros que la somme ou la moyenne de plus de trente variables aléatoires indépendantes qui suivent la même loi de probabilité suit approximativement une loi normale. La planche de Galton (considéré comme un des inventeurs de la statistique) illustre la convergence, quand n tend vers l'infini, de la loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0.5)$ vers une loi normale.

Cette distribution est souvent appelée loi des erreurs, parce que les erreurs aléatoires dans les résultats de mesures sont souvent normalement distribuées.

La loi normale représente la distribution des valeurs d'une grandeur soumise à l'influence d'un grand nombre de facteurs indépendants les uns des autres, chacun exerçant des actions de faible intensité dont les effets tendent à se compenser. On peut donner quelques exemples :

►le poids d'une tablette de chocolat supposée peser 125 grammes ; si la fabrication est honnête, on peut estimer que le poids exact d'une telle tablette suit une loi normale d'espérance 125.

►Exemple des tailles : on peut considérer un ensemble d'organismes qui en commençant leur croissance sont dans des conditions presque identiques.S'ils étaient soumis au même régime, ils atteindraient des tailles très voisines.En fait ils sont soumis à un grand nombre de variables les unes favorisant le développement et les autres le contrariant, et ces variables ayant des valeurs différentes suivant les individus , on se retrouve avec des tailles dispersées. Si ces variables sont nombreuses, indépendantes et de faibles variations, la taille suivra une loi normale.

D'une manière générale la mesure d'une grandeur physique dont la valeur exacte est supposée être m suit une loi normale d'espérance m et dont l'écart-type σest d'autant plus faible que les instruments de mesure sont performants.(poids des lingots d'or produits par une machine déterminée en une journée).

Le caractère très général de la loi normale conduit à la considérer comme une loi quasi universelle.Il ne faut pas pour autant penser que les distributions qui suivent d'autres lois de probabilité sont anormales!!

Supposer que la distribution d'un caractère est normale, c'est supposer que la distribution est déterminée par le hasard.

Le caractère gaussien d'une distribution traduit l'homogénéité de la population vis à vis du caractère étudié.

"Admettre pour normale une distribution qui ne l'est pas, c'est gommer l'abscence d'homogénéité de la population étudiée.Cette opération purement mathématique, peut parfois ne pas être idéologiquement neutre."[1]

La loi normale est la loi des phénomènes courants, la loi des grands nombres. Une variable aléatoire est normale lorsque les valeurs qu'elle prend résultent de l'addition de nombreuses causes indépendantes, aucune n'étant prépondérante.

Cette loi est caractérisée par ses deux paramètres, sa fonction de densité de probabilité est donnée par : $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$, mais comme pour toutes les lois continues, notre instrument de travail sera la **Fonction de répartition**, notée F et définie par :

$$F(x) = P(X \leq x)$$

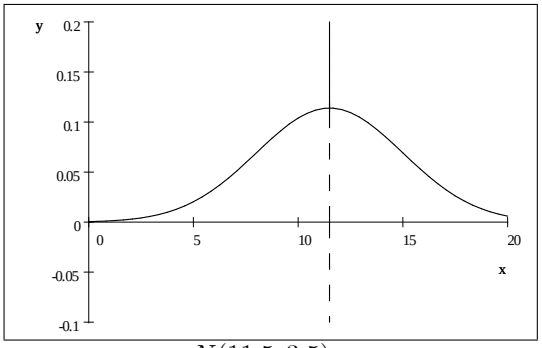
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} dt.$$

La fonction de densité est moins célèbre que sa courbe...la fameuse "courbe en cloche"(cf planche de Galton, à la villette au département de Mathématiques) ; elle ne permet pas de calculer directement les probabilités mais a permis de construire des tables de la loi normale que vous utiliserez pour les calculs. Vous **n'utiliserez donc pas** la formule précédente qui donne la fonction de répartition : et dans laquelle, m représente la moyenne et σ, l'écart type de X. Voyons l'interprétation de cette intégrale sur un exemple :

Supposons qu'après quelques années d'enseignement d'un cours, on ait constaté que l'ensemble des résultats suivait une loi normale de moyenne 11.5 et d'écart type 3.5 ; on obtient pour la densité de probabilité, la courbe en cloche d'équation :

[1] *D.Schlacther : De l'analyse à la prévision. chez Ellipses*

$y = \frac{1}{3.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-11.5}{3.5}\right)^2}$



$N(11.5; 3.5)$

La fonction de densité atteind son maximum en m (ici 11,5) et ce maximum vaut : $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ soit ici $\frac{1}{3.5\sqrt{2\pi}} \simeq 0.11$.

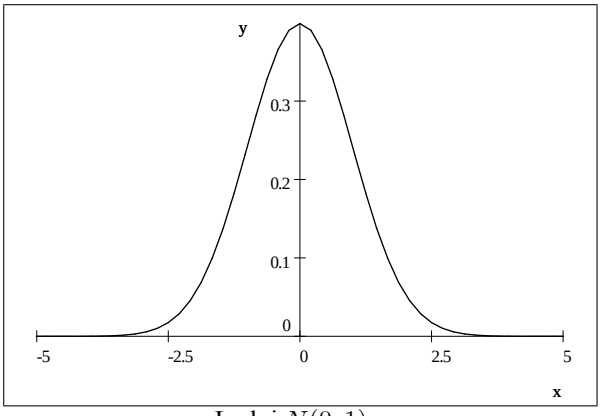
On peut constater que cette distribution est symétrique autour de la moyenne ; $F(10) = P(X \leq 10)$ représente l'aire du domaine situé entre la courbe et l'axe des x , pour $x \leq 10$;

cette aire est donnée par: $\int_{-\infty}^{10} \frac{1}{3.5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-11.5}{3.5}\right)^2} dt$ que nous ne chercherons pas à calculer, mais que nous déterminerons (tout à l'heure) à l'aide de tables numériques, ou sur excel grâce à la loi normale "cumulative".

IV.2 La loi normale centrée réduite : $\mathcal{N}(0; 1)$

1. C'est la loi normale de référence (loi normale standard dans Excel).
   Pour faciliter les calculs, on utilise en fait une table, qui correspond au cas particulier d'une variable gaussienne de moyenne nulle $m = 0$ (variable centrée) et d'écart type $\sigma = 1$;

   Densité : cette loi est notée : $\mathcal{N}(0; 1)$ et elle correspond la fonction de densité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$



La loi $N(0; 1)$

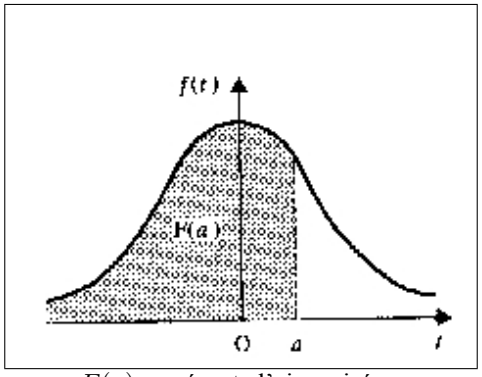
:, Sa fonction de densité est paire et la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

(*Pour amateurs :* on démontre facilement que la courbe admet deux points d'inflexion, qui ont respectivement pour abscisse -1 et 1, et qui correspondent donc à $-\sigma$ et σ. Son maximum est $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.40$. L'aire située entre la courbe et l'axe des x vaut évidemment 1 et on a donc : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1$).

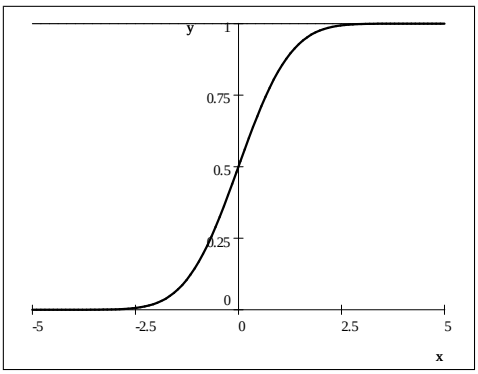
On voit d'après ces propriétés, que : $P(X \leq 0) = 0.50$ et $P(X \geq 0) = 0.50$, autrement dit que cette distribution symétrique a naturellement une moyenne et une médiane égales.

2. **La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :**
   a. $F(a) = P(X \leq a)$

      Comme toutes les fonctions de répartition, c'est une fonction continue de R dans $[0; 1]$, croissante de 0 à 1.



$F(a)$ représente l'aire grisée



La représentation graphique de F

$0 < F(a) < 1$
$F(a) < 0.5 \Leftrightarrow a < 0$

b. $F(a) = P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

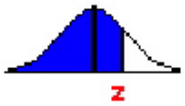
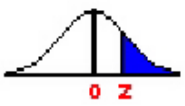
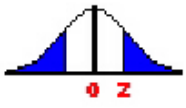
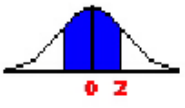
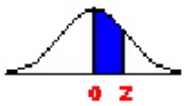
Le point $I(0; 0.5)$ est centre de symétrie de la courbe représentative de F : $\frac{F(-a) + F(a)}{2} = 0.5$

La fonction F est tabulée pour $a \geq 0$, pour $a < 0$ on utilise :

$F(-a) = 1 - F(a)$ par symétrie

c.

$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$
$\mathbf{P}(-a \leq X \leq a) = \mathbf{2F}(a) - \mathbf{1}$

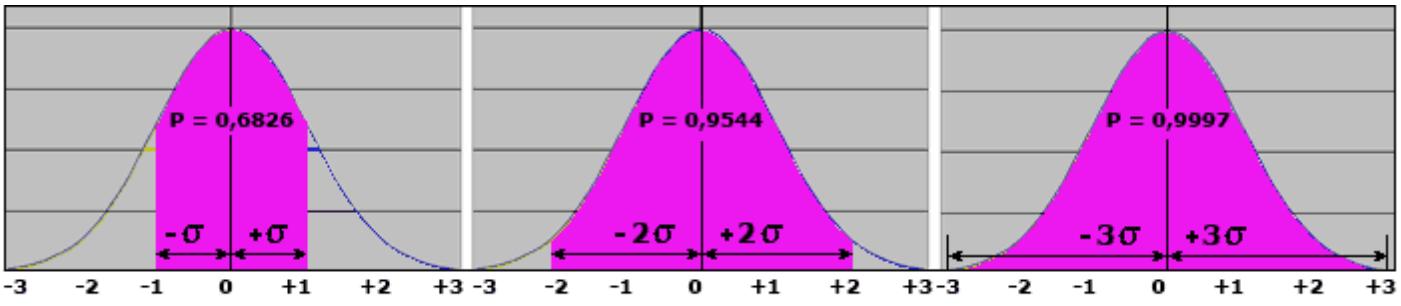
z	 $\Pr(Z \leq 2.0)$	 $\Pr(Z \geq 2.0)$	 $\Pr(Z \leq -2.0 \text{ or } Z \geq 2.0)$	 $\Pr(-2.0 \leq Z \leq 2.0)$	 $\Pr(0 \leq Z \leq 2.0)$
2.0	0.97725	0.02275	0.0455	0.9545	0.47725

d. On retrouve ici : $P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = F(a) - F(a) = 0$; dans le cas d'une loi continue, la probabilité d'une valeur donnée est nulle ; on comprend l'importance de la fonction de répartition, car on ne peut calculer des probabilités que sur des intervalles non réduits à un point .

e. Dispersion : intervalles remarquables (Plages de normalité)

On vérifie facilement les probabilités suivantes qui sont à garder en tête :

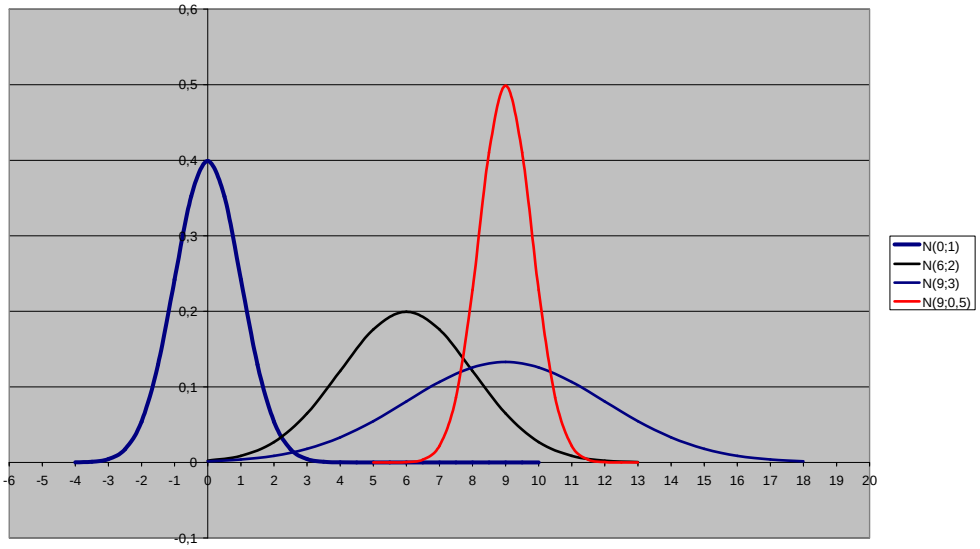
$$\begin{cases} P(-1 \leq X \leq 1) \simeq 0.6826 \\ P(2 \leq X \leq 2) \simeq 0.9544 \\ P(-3 \leq X \leq 3) \simeq 0.9997 \end{cases}$$



.

IV.3 Cas général : loi normale $\mathcal{N}(m; \sigma)$

1. Ce graphique donne la représentation de densités de diverses lois normales avec, centrée sur l'axe des y, celle de la loi normale centrée réduite.



2. **Standardisation** :

   Si X est une variable normale, de paramètres m et σ, la variable aléatoire $Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$ est normale et admet respectivement 0 pour espérance et 1 pour écart-type, c'est une variable aléatoire centrée réduite ; on dit que l'on a standardisé X.On passe d'une variable normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma)$ à $\mathcal{N}(0;1)$ par le changement de variable défini par :

   $$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

   Les propriétés de l'espérance et de la variance permettent d'affirmer que cette variable aléatoire Z admet 0 pour espérance et 1 pour écart-type, autrement dit que Z suit la loi normale centrée réduite ; on a en effet : $Z = \dfrac{1}{\sigma}(X-m)$ donc $E(Z) = \dfrac{1}{\sigma}E(X-m) = \dfrac{1}{\sigma}(E(X)-E(m)) = \dfrac{1}{\sigma}(m-m) = 0$ et $V\left(\dfrac{1}{\sigma}X - \dfrac{m}{\sigma}\right) = \dfrac{1}{\sigma^2}V(X) = \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1.$

   $$Théorème : X \hookrightarrow \mathcal{N}(m;\sigma) \Leftrightarrow Z = \frac{X-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$$

   Si nous reprenons l'exemple des notes suivant une loi normale de moyenne 11.5 et d'écart type 3.5, nous allons pouvoir calculer $P(X \leq 10)$; il faut d'abord transformer cette condition en Z : $\mathbf{Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}}$, donc $X = 10$ équivaut à $Z = \dfrac{10-11.5}{3.5} = \dfrac{-1.5}{3.5} \simeq -.43$ et on doit donc calculer $P(Z \leq -0.43) = P(Z \geq 0.43) = 1 - P(Z \leq 0.43) \simeq 1 - 0.6664 = 0.3336$; on en conclut qu'environ $33,36\%$ des candidats ont une note inférieure ou égale à 10.

   Calculons $P(8 \leq X \leq 10)$; on effectue de même la transformation en Z : $X = 8$ équivaut à $Z = \dfrac{8-11.5}{3.5} = -1$. On doit calculer : $P(-1 \leq Z \leq -0.43) = P(0.43 \leq Z \leq 1) = F(1) - F(0.43) \simeq 0.8413 - 0.6624 = 0.1789$

3. La représentation graphique est symétrique par rapport à la droite $x = m$; $P(X \leq m) = 0.50$ et sa médiane est m.
4. L'aire du domaine compris entre l'axe des x et la courbe vaut 1 .
5. La symétrie implique : moyenne=mode=médiane.
6. La loi normale est entièrement définie par sa moyenne et son écart type. Plus la variance est élevée, plus la courbe est aplatie.
7. **Dispersion** : Intervalles remarquables

   $$\begin{cases} P(m-\sigma \leq X \leq m+\sigma) \simeq 0.6826 \\ P(m-2\sigma \leq X \leq m+2\sigma) \simeq 0.9544 \\ P(m-3\sigma \leq X \leq m+3\sigma) \simeq 0.9997 \end{cases}$$

8. **Remarque importante :**
   Il n'y a que 5% des observations qui s'écartent de la moyenne de plus de 1.96 fois l'écart type.

V MOMENTS D'UNE VARIABLE ALEATOIRE

1. Loi discrète
   a. Rappel :On rappelle que : $E(X) = \sum p_i x_i$ et que $E(X^2) = \sum p_i x_i^2$ et que la variance est calculée par : $V(X) = E\left[(X-E(X))^2\right] = E(X^2) - [E(X)]^2$.(faire le lien avec les statistiques : MC-CM : moyenne des carrés moins carré de la moyenne)

On rappelle également qu'une variable aléatoire est dite centrée si son espérance est nulle (jeu équitable) . On dit alors que $E(X)$ est le moment d'ordre 1, $E\left(X^2\right)$ le moment d'ordre 2.

b. Définitions :
On appelle **moment d'ordre** r d'une variable aléatoire discrète, l'espérance de X^r, donnée par la formule :

$$m_r = E\left(X^r\right) = \sum p_i x_i^r$$

On a donc $m_1 = E(X)$, généralement notée μ_X et $m_2 = E\left(X^2\right)$

c. On appelle **moment centré d'ordre** r, ou moment autour de la moyenne μ_X, d'une variable aléatoire discrète X, l'espérance de $(X - E(X))^r$; ainsi la variance est le moment centré d'ordre 2.
$\mu_r = E\left[(X - E(X))^r\right] = E\left[(X - \mu_X)^r\right]$

2. Loi continue

a. Le principe est le même, mais les $\sum$ sont remplacés par des intégrales $\int$:

$$m_r = E\left(X^r\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)\, dx \text{ et } \mu_r = E\left[(X - E(X))^r\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^r f(x)\, dx$$

b. On notera les deux cas particuliers fondamentaux : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$

$$\boxed{V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx - [E(X)]^2}$$

c. Aplatissement et Asymétrie
Les moments centrés d'ordre 3 et 4 sont très utiles pour mesurer la forme des distributions et entrent dans la définition de deux coefficients introduits par Karl Pearson (1857-1936), et destinés à mesurer si une distribution s'éloigne de la normalité. On définit ainsi les coefficients suivants qui sont sans unité, donc indépendants de l'unité de mesure (grâce à la division par σ_X^3 et σ_X^4) :

i. **Le coefficient d'asymétrie (skewness)** : $\boxed{A = \dfrac{E\left[(X - \mu_X)^3\right]}{\sigma_X^3} = \dfrac{\mu_3}{\sigma_X^3}}$

si $A > 0$, la distribution a une longue queue à droite, tandis que $A < 0$ caractérise les distributions étalées à gauche. Si A est proche de 0, la distribution est approximativement symétrique. Si la distribution est symétrique par rapport à sa moyenne (loi normale), ce coefficient est nul.

ii. **Le coefficient d'aplatissement (kurtosis),** $\boxed{K = \dfrac{E\left[(X - \mu_X)^4\right]}{\sigma_X^4} = \dfrac{\mu_4}{\sigma_X^4}}$

Ce coefficient est une mesure du caractère plus ou moins "pointu" de la densité. On démontre que pour une loi normale quelconque, $K = 3$. Par référence à la loi normale, si $K > 3$, on parle de distribution leptocurtique (plus pointue que la distribution normale), si $K < 3$, de distribution platycurtique.
On garde à l'esprit que l'hypothèse de normalité est très présente dans les tests et que l'étude combinée de l'aplatissement et de l'asymétrie permet de contrôler la normalité.

VI APPROXIMATIONS

1. Approximation de la loi binomiale par la loi normale
Théorème limite de De Moivre-Laplace

a. L'idée du théorème :
Si X est une variable aléatoire binomiale de paramètres n et p, alors elle suit approximativement, quand n est grand, la loi normale de paramètres $m = np$ et $\sigma = \sqrt{npq}$.

Version équivalente : la variable standardisée, $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{npq}}$ suit approximativement, quand n est grand, la loi centrée réduite.

Ce théorème ne constitue en fait qu'un cas particulier du **théorème central limite** que nous aborderons plus loin.

b. Conditions d'approximation

i. Intérêt de l'approximation

La loi binomiale pose, au niveau des calculs, deux problèmes qui seront levés en cas d'approximation normale : le calcul des coefficients binomiaux est difficile, voire inextricable pour de grandes valeurs de n, et surtout la fonction de répartition est le plus souvent "ingérable" ; comment calculer pour une loi binomiale $P(X \leq 50)$?

ii. Dans le cas d'une loi binomiale relativement symétrique, où $\boxed{n \geq 50 \text{ et } p \text{ compris entre } 0.4 \text{ et } 0.6}$, on approxime pour les calculs, la loi binomiale par la loi normale $\mathcal{N}(np; \sqrt{npq})$, c'est à dire de même espérance et de même écart-type que la variable binomiale. On utilisera pour les calculs la loi standardisée.

On fait de même si $\boxed{npq \geq 18}$.

iii. Exemple :

Considérons dans une université un cours auquel sont inscrits 150 étudiants et supposons qu'il soit admis statistiquement que seulement 55% des étudiants inscrits assistent au cours. Précisons la loi de probabilité de la variable aléatoire X représentant le nombre d'étudiants assistant au cours et donnons une approximation de cette loi.

Il est clair que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(150; 0.55)$; sa moyenne est $m = n * p = 150 * 0.55 = 82.5$, sa variance $V(X) = npq = 150 * 0.55 * 0.45 = 37.125$ et son écart-type : $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{37.125} \simeq 6.1$. On est dans le cas où $n \geq 50$ et p compris entre 0.4 et 0.6, on peut donc approcher la loi de X par la loi normale $\mathcal{N}(82.5; 6.1)$. Nous reprendrons cet exemple dans le paragraphe suivant.

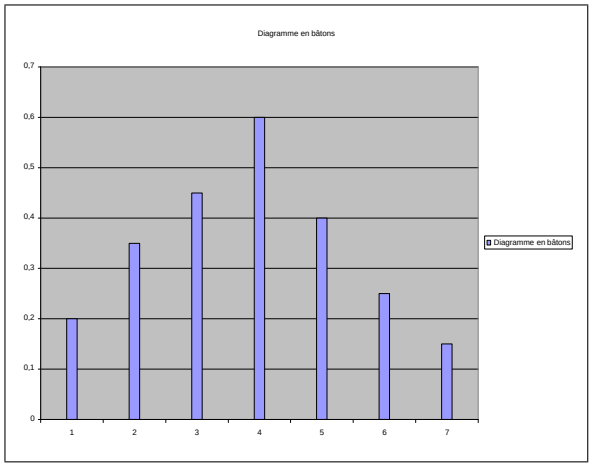
2. Approximation de la loi de Poisson par la loi normale

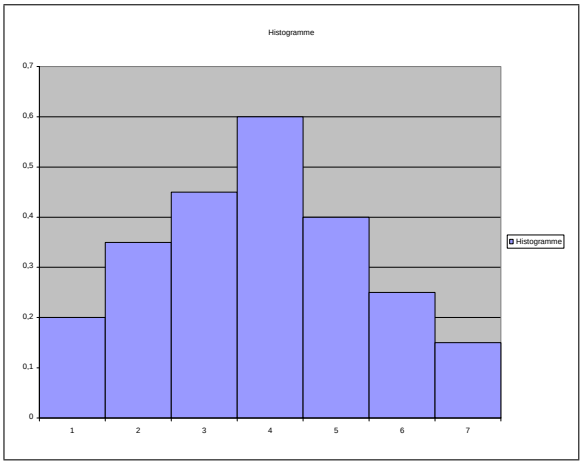
a. i. On admet que si $\lambda \geq 18$, la loi de Poisson peut être approchée par la loi normale de moyenne $m = \lambda$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{\lambda}$.

3. La correction de continuité

Quand on approxime une loi discrète par une loi continue, on doit opérer **une correction de continuité,** qui consiste à tranformer un diagramme en bâtons en histogramme ; celà revient à représenter la variable discrète par un histogramme, chaque "bâton"($P(X = k)$) étant représenté par un rectangle de base 1 ($[k - 0.5; k + 0.5]$) et de même hauteur, si bien que l'aire du rectangle vaut $P(X = k)$,et que la somme des aires des rectangles de l'histogramme ainsi formé vaut 1.

4.





correction de continuité, si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n.p)$ et que les conditions d'une approximation sont réunies, alors si $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(np; \sqrt{npq})$, on a :

$$\boxed{\begin{cases} P(X > x_1) \text{ devient } P(Y > x_1 + 0.5) \\ P(X \geq x_1) \text{ devient } P(Y \geq x_1 - 0.5) \\ P(X < x_1) \text{ devient } P(Y < x_1 - 0.5) \\ P(X \leq x_1) \text{ devient } P(Y \leq x_1 + 0.5) \end{cases}}$$

5. Exemples :

a. Exemple 1

Reprenons l'exemple du cours où X le nombre d'étudiants présents suit la loi $\mathcal{B}(150; 0.55)$ et supposons que l'on veuille calculer la probabilité d'avoir au maimum 100 étudiants présents. $P(X \leq 100) = P(Y \leq 100.5) = P\left(Z \leq \dfrac{100.5 - 82.5}{6.1}\right) = P(Z \leq 2.95) \simeq 0.9984$, Y variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(82.5; 6.1)$ et $Z = \dfrac{Y - 82.5}{6.1}$ suivant la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$.

b. Exemple 2

Soit une variable aléatoire X suivant la loi $B(100; 0.3)$; $npq = 100 * 0.3 * 0.7 = 21$, on peut donc prendre pour approximation de la loi $B(100; 0.3)$,la loi $\mathcal{N}\left(30; \sqrt{21}\right)$soit $N(30; 4.5826)$

Cas important : $P(X = 25)$; pour la loi normale on utilise le changement de variable $Z = \frac{X-30}{4.5826}$, Z suivant la loi $N(0\,;1)$.

Loi Binomiale	$\binom{100}{25} * 0.3^{25} * 0.7^{75} \simeq 0.04956$
Loi normale	$P(24.5 \leq X \leq 25.5) = P\left(\frac{24.5-30}{4.5826} \leq Z \leq \frac{25.5-30}{4.5826}\right) \simeq P(-1.2002 \leq Z \leq -0.98198)$ Soit en utilisant la fonction de répartition : $F(1.2002) - F(0.98198)$
	soit $P(-1.2002 \leq Z \leq -0.98198) \simeq F(1.20) - F(0.98) \simeq 0.8849 - 0.8365 = 0.0484$

avec la table de la loi normale centrée réduite.

On peut calculer de même $P(X \leq 25)$: avec la loi normale on prendra : $P(X \leq 25.5) = P\left(Z \leq \frac{25.5-30}{4.5826}\right) = F(-0.98198) = 1 - F(0.98198) \simeq 1 - 0.8365 = 0.1635$.

Pour calculer $P(X < 25)$ on prendra : $P(Y \leq 24.5) = P\left(Z \leq \frac{24.5-30}{4.5826}\right) = F(-1.2002) = 1 - F(1.20) \simeq 1 - 0.8849 \simeq 0.1151$.

VIISomme de variables indépendantes

1. Rappel

$$\boxed{\text{si X et Y sont } \textbf{indépendantes}, \text{ on a : } V(X+Y) = V(X) + V(Y)}$$

   a. i. **En particulier :** si $X_1, X_2, ...X_n$ sont des variables aléatoires **indépendantes**, **de même espérance** m **et de même variance** V et donc de même écart-type σ on a :

$$\boxed{\begin{cases} E(\sum X_i) = n * m \\ V(\sum X_i) = nV \\ \sigma(\sum X_i) = \sigma\sqrt{n} \end{cases}}$$

   b. Exemple : pour établir son tarif, un assureur procède à une modélisation du risque . Il en ressort que les montants qu'il aura à régler pour les sinistres décès constituent pour les trois années à venir trois variables aléatoires indépendantes, de moyennes respectives 10000 € ; 20000 € ; 30000 € ,et d'écart-types identiques $\sigma = 1000$ €. Déterminer l'espérance et l'écart-type de Y la variable aléatoire donnant le total des montants à verser sur la période de trois ans, puis de Z,représentant le montant moyen annuel de ses versements.

2. **Addition de variables aléatoires indépendantes**

   a. **Variables aléatoires binomiales**
   Si X_1 suit la loi $\mathcal{B}(n_1; p)$ et X_2 la loi $\mathcal{B}(n_2; p)$ et si X_1 et X_2 sont des variables aléatoires **indépendantes,** alors $X_1 + X_2$ suit la loi $\mathcal{B}(n_1 + n_2; p)$

   b. **Variables aléatoires poissonniennes**
   Si X_1 suit la loi $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et X_2 la loi $\mathcal{P}(\lambda_2)$ et si X_1 et X_2 sont des variables aléatoires **indépendantes,** alors $X_1 + X_2$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

   c. **Variables aléatoires normales**
   Si X_1 et X_2 sont des variables aléatoires **normales indépendantes**, de moyennes respectives $m_1$et m_2 et d'écart-types σ_1 et σ_2 alors $S = X_1 + X_2$ est distribuée suivant une loi normale et :

$$\boxed{\begin{cases} E(S) = m_1 + m_2 \\ \sigma(S) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \text{ penser à Pythagore} \end{cases}}$$

   dans le cas d'une combinaison linéaire : $Y = aX_1 + bX_2$,on a :$\begin{cases} E(Y) = am_1 + bm_2 \\ \sigma(Y) = \sqrt{a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2} \end{cases}$

   d. Exemples :
      i. En Syldavie, 80% des élèves ont le bac. Un village attend 10 naissances, 6 garçons et 4 filles ; on appelle respectivement X et Y le nombre de garçons bacheliers et le nombre de filles bachelières parmi ces naissances.
      Déterminer les lois de probabilités de X et de Y. Calculer la probabilité qu'il y ait en tout 7 bacheliers.

      ii. La serveuse casse en moyenne trois verres et une assiette par mois, ce de façons indépendantes, le nombre X d'assiettes cassées et le nombre Y de verres cassés chaque mois suivant une loi de Poisson. Déterminer : $P(X = 2)$; $P(Y = 2)$, puis déterminer la probabilité d'avoir 4 objets cassés dans le mois.

      iii. Lors d'un concours, la note X des candidats en comptabilité suit la loi normale $\mathcal{N}(11; 3)$ et la note Y des candidats en mathématiques suit la loi normale $\mathcal{N}(13; 4)$. Quelle est la probabilité que la moyenne d'un candidat soit supérieure ou égale à 10 ?

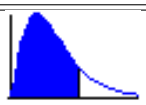
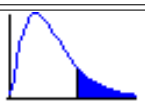
VIIILA LOI DE χ^2

1. Définition : cette loi attribuable à Karl Pearson se déduit de la loi normale centrée réduite.
   Si Z_1, $Z_2, ...,$ Z_ν sont ν(nu) variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes, alors la somme des carrés de ces ν variables aléatoires:

   $S = Z_1^2 + Z_2^2 + .. + Z_\nu^2 = \sum_{i=1}^{i=\nu} Z_i^2$ suit une loi de χ^2à ν degrés de liberté.

2. Valeurs tabulées de Khi-deux
   La table du Khi-deux donne les valeurs du khi-deux qui dépendent du degré de liberté ν et du seuil de signification α.
   Exemple : pour un degré de liberté $\nu = 8$ et pour un seuil de signification α de 0.05 (5%), la table donne un $\chi^2 = 15.5073$, ce qui signifie que $P\left(\chi^2 > 15.5073\right) = 0.05$,donc que $P\left(\chi^2 \leq 15.5073\right) = 0.95 = 1 - \alpha$

INTRODUCTION A L'ECONOMETRIE

	
$\Pr\left(X \leq \chi^2\right) = 1-\alpha$	$\Pr\left(X \geq \chi^2\right) = \alpha$

3. Test du Khi-deux
   a. Introduction

   Le test du Khi-deux s'inscrit dans la théorie générale des tests d'hypothèses .Il s'agit de construire une démarche qui va fournir une règle de décision permettant, sur la base de résultats d'un échantillon, de faire un choix entre deux hypothèses statistiques. On appelle **hypothèse nulle**, notée H_0 (hypothèse de différence nulle), l'hypothèse que l'on effectue sur la population parente (deux caractères sont indépendants, le nombre de clients suit une loi de Poisson,etc.) ; toute la démarche du test s'effectue en considérant cette hypothèse nulle comme vraie ; le rejet éventuel de l'hypothèse nulle conduit à l'acceptation de l'hypothèse alternative (contre hypothèse) H_1.

   On doit noter que même si l'hypothèse nulle est vérifiée sur l'échantillon tiré, les fluctuations d'échantillonnage peuvent conduire à une mauvaise conclusion. On doit donc établir des règles de décision qui conduisent sans équivoque au non-rejet ou au rejet de H_0. La décision de favoriser telle hypothèse est basée sur les résultats d'un échantillon et donc élaborée à partir d'une information très partielle ; il est impossible d'être sûr de prendre la bonne décision, on peut seulement limiter la probabilité de prendre une décision erronée.
   La décision prise à l'issue du test comporte deux risques : rejeter H_0, alors que cette hypothèse est vraie et "accepter" H_0 alors que cette hypothèse est fausse. On notera "qu'accepter" H_0 ne signifie pas que l'on a prouvé qu'H_0 est vraie, mais uniquement que les données de l'échantillon ne sont pas suffisamment contradictoires avec H_0 pour pouvoir rejeter H_0.Le cas de la justice est éloquent, le principe de présomption d'innocence stipule que tout accusé est présumé innocent (H_0) ; "accepter" ou plutôt ne pas rejeter H_0, c'est acquiter faute de preuves.

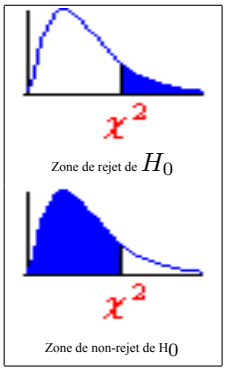
   b. Les deux risques

   Le premier risque, noté α est appelé le risque de première espèce : c'est le rique, consenti à l'avance, de rejeter à tort l'hypothèse nulle ; la démarche des tests va permettre de contrôler α, c'est à dire de rejeter à tort une hypothèse nulle vraie dans une faible proportion de cas ; α s'appelle le seuil de signification, les seuils les plus utilisés étant $\alpha = 0.05$ et $\alpha = 0.01$.

   Ce risque, celui en justice de condamner un innocent est grave, mais néanmoins inévitable ; peut-on le réduire ? bien sûr, mais on comprend bien que si l'on veut se tromper très rarement, et ne prendre aucun risque de rejeter à tort H_0,alors on va accepter H_0 dans tous les cas et augmenter le risque d'accepter H_0 alors qu'elle est fausse.
   Reprenons le cas de la justice, on voit bien que si l'on refuse de prendre le moindre risque de condamner un innocent, alors on doit accepter le risque de relaxer des coupables et augmenter ainsi l'autre risque, noté β et appelé le risque de seconde espèce, celui de ne pas rejeter H_0, alors que cette hypothèse est fausse. On voit donc que l'on ne peut pas trop diminuer α ; on prend le plus souvent $\alpha = 0.05$

   c. Arbre de décision

	$\overset{\alpha}{\nearrow}$	**Rejet** H_0	**Erreur de** $1^{ère}$ **espèce**
	Vraie		$\alpha = P_{H_0}$ (rejeter H_0)
$\nearrow$	$\underset{1-\alpha}{\searrow}$	Non-rejet de H_0	Bonne décision
	$\overset{\pi=1-\beta}{\nearrow}$	Rejet H_0	Bonne décision
$\searrow$	**Vraie**		$\beta = P_{H_1}$ (ne pas rejeter H_0)
	$\underset{\beta}{\searrow}$	**Non-rejet de** H_0	**Erreur de 2ème espèce**



   d. Puissance du test :
   La probabilité, notée π, de rejeter H_0 quand cette hypothèse est fausse est appelée la puissance du test, et est donnée par $\pi = 1-\beta$: c'est la capacité d'un test à réfuter une hypothèse fausse. Minimiser β revient à maximiser la puissance du test.

4. Test d'indépendance

Le test du Khi-deux sert notamment pour tester l'indépendance de deux caractères qualitatifs, quand on dispose d'un tableau de contingence.

Le principe est de "mesurer " la distance entre une distribution observée et une distribution théorique (celle de l'indépendance).

On note O_i les effectifs observés et C_i les effectifs calculés ou théoriques, ceux de l'indépendance et

on utilise la quantité suivante :

$$\chi^2_{cal} = \frac{(O_1 - C_1)^2}{C_1} + \frac{(O_2 - C_2)^2}{C_2} + ... + \frac{(O_n - C_n)^2}{C_n}$$ qui suit approximativement une loi du khi-deux avec ν degrés de liberté, si l'échantillon est assez grand ($n > 30$). Il reste à préciser le degré de liberté.

Le calcul du degré de liberté est donné par : $\nu = (l-1)(c-1)$ si l désigne le nombre de lignes et c le nombre de colonnes du

tableau . L'indépendance est basée sur l'indépendance probabiliste : A et B sont indépendants si et seulement si : $P_B(A) = P(A)$.

Exemple : On a relevé dans une ANPE ces observations issues d'une enquête sur le sexe et la durée du chômage. La durée du chômage est-elle liée au sexe ?

Durée / Sexe	Moins d'un an	Plus d'un an	Total
Masculin	**501**	**539**	
Féminin	**428**	**552**	
Total			

Plan :

a. Formulation des hypothèses H_0 et H_1.

b. Choix du seuil de signification : 5%

c. Calcul des effectifs théoriques ou calculés que nous noterons C_i (avec comme condition que chaque C_i doit être au moins égal à 5) et calcul du Khi^2. $\chi^2 = \sum \dfrac{(O_i - C_i)^2}{C_i}$.

d. Déterminer le ddl (degré de liberté) : $\nu = (c-1) * (l-1)$ où l et c désignent respectivement le nombre de lignes et de colonnes des données de l'échantillon, c'est à dire le nombre de modalités de chaque caractère.

e. Lire le Khi^2 de la table ; cette valeur est dite "critique" et permet de définir les régions de rejet et d'acceptation de H_0.

f. Règle de décision basée sur les valeurs observées de l'échantillon :
Si la valeur du Khi^2 calculé est inférieure ou égale au Khi^2 de la table (valeur critique : seuil limite de la région de non rejet de H_0), on ne peut rejeter H_0, par contre si $\chi^2_{calc} > \chi^2_{table}$, on rejettera l'hypothèse d'indépendance statistique des deux caractères.

g. Décision : on applique la règle de décision définie précédemment, et on conclut à partir des données de l'échantillon à l'existence ou à l'abscence d'un lien statistique entre les caractéres.

h. Valeur p ($p - value$) ou **degré de signification** :
Le choix d'un seuil de signification de 5% peut sembler arbitraire ; On prolonge le test par une information précieuse : le degré de signification. Dans l'exemple proposé, on trouve $\chi^2_{calc} \simeq 4.11$ et $\chi^2_{0.05;1} \simeq 3.84$; $\chi^2_{calc} > \chi^2_{0.05;1}$, on est donc conduit, au seuil de 5%, à rejeter H_0 et à accepter l'hypothèse H_1 d'une liaison significative entre le sexe et la durée du chômage. La question se trouve alors posée de l'arbitraire du seuil de 5% et on peut rechercher la plus petite valeur du risque d'erreur qui conclut à cette liaison significative : on peut avec Excel utiliser la fonction $LOI.KHIDEUX\,(4.11; 1)$ qui nous renvoie la probabilité critique p de 4.26% que l'on appelle le degré de signification ou valeur p. Si l'on a fixé un seuil de signification α, on rejette H_0 si $p < \alpha$. Plus p est proche de zéro, plus forte est la contradiction entre H_0 et les données de l'échantillon.

IX Theoreme Central Limite (T.C.L.)

1. L'idée du théorème : la somme d'un grand nombre de variables aléatoires indépendantes suit une distribution approximativement normale ; ce théorème est l'un des plus remarquables résultats de la théorie des probabilités ; ce théorème explique entre autres que de nombreux phénomènes naturels admettent une distribution en forme de cloche, c'est-à dire normale.

   a. Cas particulier (généralisation de ce que l'on a vu pour deux variables)**:**

   Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi normale $N(m, \sigma)$, alors :

   · la distribution de la variable aléatoire $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + ... + X_n}{n}$ peut être approchée par la loi normale $N(m, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$ quand n est grand ($n \geq 30$).

   · Théorème : la distribution de la variable aléatoire $\dfrac{X_1 + ... + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$ **tend vers la loi normale** $N(0,1)$ quand n tend vers l'infini.

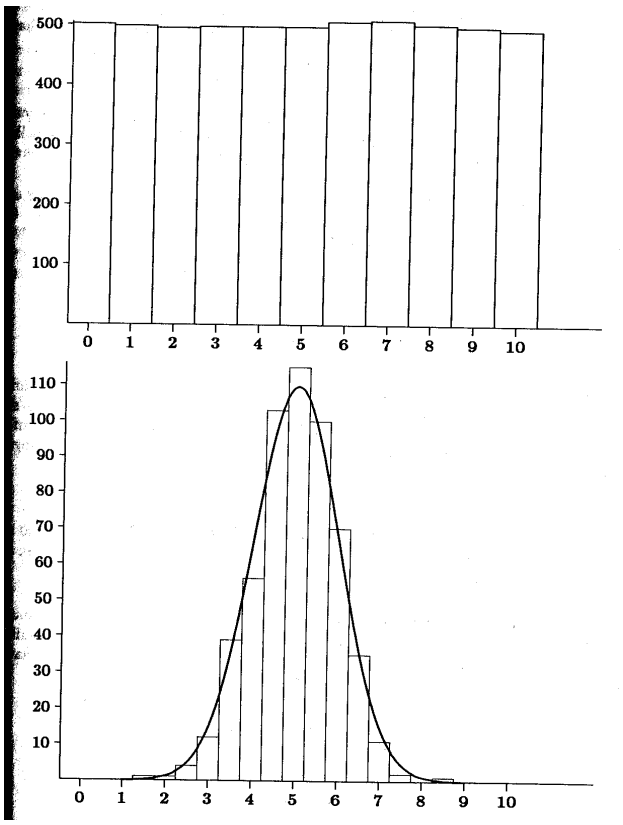
   b. **Cas général** : Dans le cas particulier, nous avons supposé que les variables aléatoires indépendantes qui intervenaient étaient distribuées selon une loi normale ; le cas général rend cette hypothèse superflue :

   Théorème Central Limite : Si $X_1, X_2, ...X_n$ sont n variables aléatoires **indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance commune** m **et de variance** σ^2,alors la distibution de la variable aléatoire

   $$\frac{X_1 + ... + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \text{ tend vers la loi normale } N(0,1)$$

   quand n tend vers l'infini

   c. Une illustration du théorème central limite : Nous prenons 5500 nombres entiers aléatoires de 0 à 10. Le premier graphique représente cette distribution et ce diagramme en bâtons montre une loi uniforme. Ensuite, les nombres ont été répartis de façons aléatoires en 550 échantillons de 10, pour chacun desquels nous calculons la moyenne ; le deuxième graphique montre que la distribution des moyennes suit une loi très proche de la loi normale.



2. **Application pratique du TCL**
   a. Version "pratique"

   La moyenne d'un échantillon extrait d'une population quelconque est distribuée selon une loi pratiquement normale quand la taille de l'échantillon est suffisamment grande.

   b. En pratique, si $X_1, X_2, ...X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance commune μ et de variance σ^2 on a :

   · la charge totale centrée réduite $\frac{\sum X_i - E\left(\sum X_i\right)}{\sigma\left(\sum X_i\right)} = \frac{\sum X_i - nm}{\sqrt{n}\sigma}$ **suit approximativement la loi normale** $N(0,1)$ pour n suffisamment grand ($n \geq 30$ peut suffire).

   · la charge moyenne centrée réduite $\frac{\overline{X} - E\left(\overline{X}\right)}{\sigma\left(\overline{X}\right)} = \frac{\overline{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$ **suit approximativement la loi normale** $N(0,1)$ pour n suffisamment grand ($n \geq 30$ peut suffire).

   c. Exemples :
      i. on lance 30 dés honnêtes et l'on cherche la probabilité pour que la somme soit comprise entre 100 et 110. Si X_i désigne le résultat du ième dé, $E(X_i) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{7}{2}$ et $V(X_i) = \frac{35}{12}$; l'application du TCL donne,

      si $Y = \sum_{i=1}^{i=30} X_i$ et si $Z = \frac{Y - 30*3.5}{\sqrt{\frac{35}{12}*30}}$: $P(100 \leq Y \leq 110) = P\left(\frac{100 - 30*3.5}{\sqrt{\frac{35}{12}*30}} \leq Z \leq \frac{110 - 30*3.5}{\sqrt{\frac{35}{12}*30}}\right)$

      soit : $P\left(\frac{-5}{\sqrt{\frac{175}{2}}} \leq Z \leq \frac{5}{\sqrt{\frac{175}{2}}}\right) = P\left(-\sqrt{\frac{2}{7}} \leq Z \leq \sqrt{\frac{2}{7}}\right)$ soit en notant Π la fonction de répartition de la loi $N(0;1)$:

      $2\Pi\left(\sqrt{\frac{2}{7}}\right) - 1 \simeq 2\Pi(0.53) - 1 \simeq 2 * 0.7019 - 1 \simeq 0.403\,8$

X Learning by doing

1. Une variable aléatoire suit une loi uniforme sur $[5;9]$. Calculer sa moyenne. Calculer les probabilités suivantes : $P(X \leq 3)$, $P(X \leq 6)$, P
2. La durée d'une conversation téléphonique, mesurée en mn, est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda = 0.1$. Quelle est la probabilité qu'une conversation téléphonique dure moins de 10mn, plus de 5mn, soit comprise entre 10 et 20mn ?

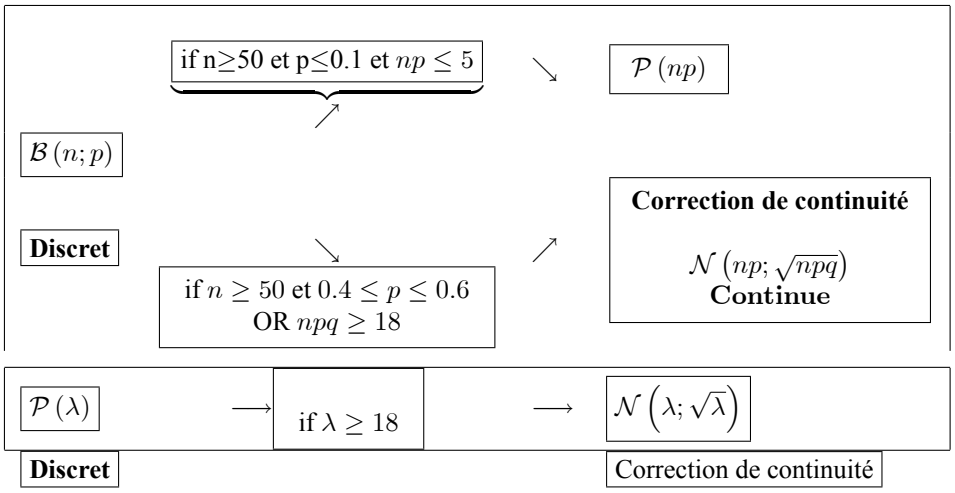
3. Soit X une variable aléatoire normale de paramètres respectifs $m = 3$ et $\sigma = 2$
   Calculer $P(X \leq 3), P(X \leq 4), P(X \leq -1), P(0 \leq X \leq 4.5), P(X \geq 0), P(X \geq 5), P(0 \leq X \leq 2)$.
4. Le nombre moyen d'accidents de vols commerciaux, par an, dans le monde est de 25. En supposant que le nombre d'accidents par an suit une loi de Poisson calculer la probabilité qu'il y ait sur une année : 20 accidents, 25. En utilisant une approximation calculer la probabilité qu'il y en ait strictement moins que 25, au moins 28.
5. Selon un expert, témoignant dans un procès en attribution de paternité, la durée d'une grossesse, en jours, c'est-à dire le laps de temps entre la conception et la naissance est de distribution approximativement normale et de paramètres $m = 270$ et de variance 100. Un des pères putatifs est en mesure de prouver son abscence du pays pendant une période s'étendant entre le 290 ième jour et le 240 ième précédent la naissance. Quelle est la probabilité qu'il puisse être le père de l'enfant ?
6. Une agence de recrutement constate que 6 commerciaux sur 10 falsifient leur C.V.
   On note X le nombre de fichiers fasifiés dans le fichier comportant 460 commerciaux.
   a. Préciser la loi de probabilité de X .
   b. Donner le nombre moyen de fichiers falsifiés.
   c. Déterminer l'écart-type de X.
   d. Montrer que X peut être approchée dans les calculs par une variable aléatoire Y dont on précisera la loi de probabilité. Calculer $P(Y \geq 285)$ et $P(262 \leq Y \leq 290)$.
7. Un distributeur d'essence arrondit les montants à 5 centimes d'euro près. On considère que les arrondis suivent une loi uniforme sur $[-2.5; 2.5]$.
   a. Expliciter la fonction de répartition de cette distribution et calculer sa moyenne et son écart-type.
   b. On suppose que 1200 automobilistes ont utilisé ce distributeur et on note S la variable aléatoire désignant la somme totale des arrondis. Citer le théorème central limite et expliciter la loi de probabilité de S.
      Quelle est la probabilité que le gain dû aux arrondis soit supérieur à 1 euro ?
8. Virginie a rendez-vous avec Paul....à la sortie des cours, jeudi à $20h30$ mais elle ne pourra l'attendre plus de 12 mn. Paul qui suit ses cours à l'Université de Médecine, estime qu'il peut arriver à tout moment entre $20h25$ et $20h45$,de façon équiprobable.
   Quelle est la probabilité que Paul rencontre Virginie ?
9. A la suite d'une enquête effectuée par une compagnie d'assurance, on a établi que le coût de réparation R (en euros) d'une voiture accidentée suit une loi normale de moyenne 4115 € et d'écart-type $\sigma = 200$.
   Déterminer la probabilité des événements suivants : $\{R < 4150\}$; $\{3900 < R < 4150\}$
10. 120 personnes se font rembourser une somme d'argent par leur compagnie d'assurance . La somme versée à chaque personne est une variable aléatoire de moyenne 50 euros et d'écart-type 30 euros ; ces variables aléatoires suivent toutes la même loi et sont indépendantes. La compagnie a budgétisé 6500 euros pour ces indemnités . Quelle est la probabilité pour que cette somme permette d'indemniser les 120 assurés ?
11. Lors d'une enquête sur l'alimentation, on a posé la question suivante : "Avez vous une préférence prononcée pour la cuisine de votre pays", les sondés ayant le choix entre 3 réponses :A "OUI", B"NON" et C" SANS OPINION". On a obtenu les résultats présentés dans le tableau de gauche, pour des individus de 4 pays. On veut répondre à la question suivante :

    "Au niveau de risque α de 5%, peut-on estimer qu'il y a une liaison significative entre la nationalité des individus et leur réponse ?".

	A	B	C
Chine	1094	150	258
France	822	302	415
Inde	1242	160	133
USA	784	293	480

INTRODUCTION A L'ECONOMETRIE

XI BILAN APPROXIMATIONS

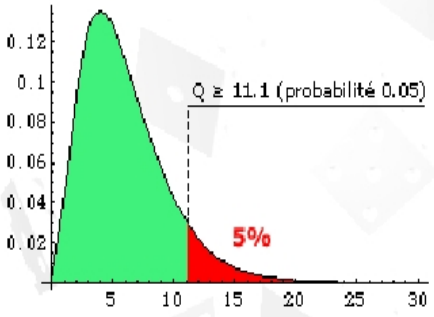


XIIFONCTION DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE CENTREE REDUITE

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

TABLE DU KH^2

ν est le nombre de degrés de liberté et α le seuil de tolérance.



Pour 5 degrés de liberté, Q (voir test du χ^2) sera supérieur à 11.07 dans seulement 5% des cas.

ν	α = 0.05	α = 0.01	α = 0.001
1	3.84	6.64	10.83
2	5.99	9.21	13.82
3	7.82	11.35	16.27
4	9.49	13.28	18.47
5	11.07	15.09	20.52
6	12.59	16.81	22.46
7	14.07	18.48	24.32
8	15.51	20.09	26.13
9	16.92	21.67	27.88
10	18.31	23.21	29.59
11	19.68	24.73	31.26
12	21.03	26.22	32.91
13	22.36	27.69	34.53
14	23.69	29.14	36.12
15	25.00	30.58	37.70
16	26.30	32.00	39.25
17	27.59	33.41	40.79
18	28.87	34.81	42.31
19	30.14	36.19	43.82
20	31.41	37.57	45.32
21	32.67	38.93	46.80
22	33.92	40.29	48.27
23	35.17	41.64	49.73
24	36.42	42.98	51.18
25	37.65	44.31	52.62
26	38.89	45.64	54.05
27	40.11	46.96	55.48
28	41.34	48.28	56.89
29	42.56	49.59	58.30
30	43.77	50.89	59.70